

# Lógica

## Resolución en Lógica Proposicional

Damiano Zanardini

GRUADO/A EN INGENIERÍA INFORMÁTICA  
FACULTAD DE INFORMÁTICA  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID  
damiano.zanardini@gmail.com  
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2013/2014

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Introducción

## Idea general

- en el tema anterior aprendimos cómo transformar un razonamiento en forma clausular
- entonces comentamos que lo que nos interesaba es la **satisfacibilidad** del conjunto de cláusulas
- ahora vamos a ver cómo se puede decidir si un conjunto de cláusulas es satisfacible

## Satisfacibilidad

Un conjunto de cláusulas es satisfacible si existe una interpretación que sea modelo de **todas y cada una** de las cláusulas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Introducción (paréntesis)

## Dónde estamos y a dónde vamos

- decidir la satisfacibilidad de una fórmula proposicional (o un conjunto de fórmulas) es el problema SAT, extremadamente importante en informática
  - verificación de circuitos y procesadores
  - horarios, planificación, calendarios, optimización...
  - propiedades de programas (p. ej. la terminación o la corrección de algunas operaciones)
- por eso hasta ahora ha habido tanta investigación en los algoritmos para resolver SAT:
  - porque tiene muchísimas aplicaciones  $\rightsquigarrow$  <http://www.satlive.org>
  - y también por la  $\mathcal{NP}$ -completitud

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# De vuelta a la introducción

## Satisfacibilidad e insatisfacibilidad

- para demostrar la satisfacibilidad basta dar un modelo
- para demostrar la insatisfacibilidad hace falta demostrar que **no hay** modelos, que es algo más difícil

Por lo tanto, vamos a introducir el método de **resolución** que nos ayuda en la segunda tarea, y también nos dice algo de la primera:

- si el conjunto es insatisfacible, entonces lo demostramos
- si es satisfacible, podemos igualmente aplicar el método y después de un número finito de pasos sabremos que no podemos seguir, por lo que quedará demostrado que es satisfacible

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# El método de Resolución de Robinson

## Idea general

Obtener nuevas cláusulas deducidas del conjunto original  $\mathcal{C}$ , de forma que  $\mathcal{C}$  es insatisfacible si se pueden deducir un literal y también su negación

## Regla de la resolución

Dadas dos cláusulas  $L \vee .. \vee L \vee C_1$  y  $\neg L \vee .. \vee \neg L \vee C_2$ , donde  $L$  es un literal, se puede deducir una nueva cláusula  $C_1 \vee C_2$  que se llama el **resolvente**

- si hay más copias de  $L$  o  $\neg L$  es como si hubiera una (idempotencia)
  - $\neg p \vee \neg p \vee q$  es lo mismo que  $\neg p \vee q$
- se puede cambiar el orden de los literales (comutatividad)
  - $\neg p \vee q$  es lo mismo que  $q \vee \neg p$
- la aplicación de esta regla de resolución se llama **paso de resolución sobre  $L$**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# El método de Resolución de Robinson

## Insatisfacibilidad

- aplicando la regla varias veces se puede derivar una contradicción si y sólo si el conjunto original es insatisfacible
- dicha contradicción viene de la generación de  $L$  y  $\neg L$  como resolventes
- en este caso, un último paso de resolución aplicado a  $L$  y  $\neg L$  genera la **cláusula vacía**  $\square$ , que hace explícito el resultado de insatisfacibilidad

## Ventajas

- el sistema de deducción sólo consiste de una única regla
- todo el proceso se puede automatizar fácilmente

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# El método de Resolución de Robinson

Método: dado un conjunto  $S$  de cláusulas

$$X = S$$

repite

generar con pasos de resolución todos los resolventes posibles para los elementos de  $X$ : sea este conjunto  $R(X)$

si  $(\square \in R(X))$  entonces **STOP**: *INSAT*( $S$ )

si  $(R(X) \subseteq X)$  entonces **STOP**:

se han generado ya todos los resolventes posibles sin haber generado  $\square$ ; por lo tanto *SAT*( $S$ )

$$X = R(X) \cup X$$

## Teorema (Res)

Un conjunto  $S$  de cláusulas es insatisficible si  $(\square)$  se puede deducir de él.

Cartagena99

CLASAS ONLINE DE PROGRAMACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE AND TECHNOLOGY  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70

# Ejemplos

$$S = \{ p, q \vee \neg p \vee \neg t, t \vee s, \neg s, \neg q \}$$

$$C_1: p$$

$$C_2: q \vee \neg p \vee \neg t$$

$$C_3: t \vee s$$

$$C_4: \neg s$$

$$C_5: \neg q$$

$$C_6: t \quad (C_3, C_4)$$

$$C_7: q \vee \neg t \quad (C_1, C_2)$$

$$C_8: q \quad (C_6, C_7)$$

$$C_9: \square \quad (C_5, C_8)$$

- la primera columna es el nombre del resolvente, y la segunda es el resolvente
- la tercera columna son las cláusulas que resuelven entre sí generando la nueva

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORIAS  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70



# Ejemplos

$$S = \{ p, q \vee \neg p \vee \neg t, t \vee s, \neg s \}$$

$$\begin{array}{l} C_1: p \\ C_2: q \vee \neg p \vee \neg t \\ C_3: t \vee s \\ C_4: \neg s \end{array}$$

---

1ª iteración	$C_5: q \vee \neg t$	$(C_1, C_2)$
	$C_6: q \vee \neg p \vee s$	$(C_2, C_3)$
	$C_7: t$	$(C_3, C_4)$
2ª iteración	$C_8: q \vee s$	$(C_3, C_5)$
	$C_9: q$	$(C_5, C_7)$
	$C_{10}: q \vee \neg p$	$(C_4, C_6)$
3ª iteración	(nada más)	

- cada parte de la derivación corresponde a una iteración del bucle
- no se han representado los resolventes repetidos
- al no poder hallar la cláusula vacía y ni generar más resolventes se demuestra la insatisfactibilidad de  $S$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES TUTORÍAS  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP. 689 45 44 70  
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC  
CALL OR WHATSAPP. 689 45 44 70